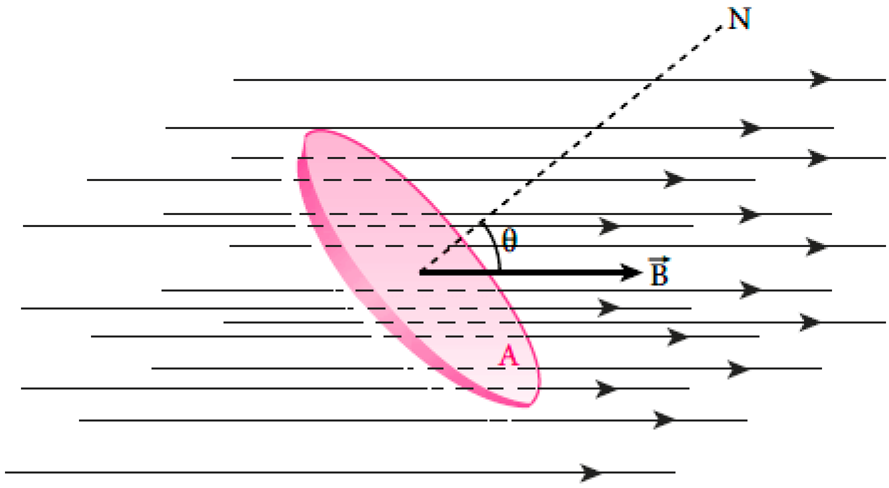
LEÇON 10 : CALCUL INTEGRAL

1. SITUATION D'APPRENTISSAGE

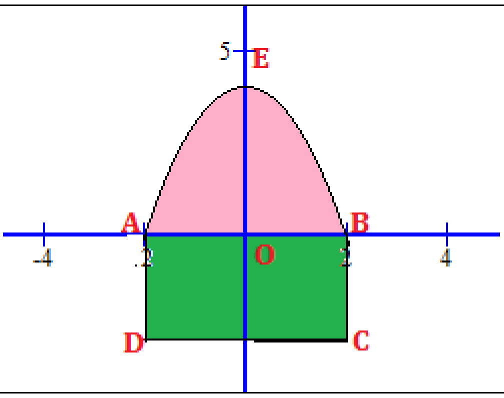
Dans ses recherches sur internet, un élève de Terminale scientifique découvre le document suivant :

Densité de flux magnétique



La densité du flux magnétique dépend du flux magnétique traversant la zone A :
$\Phi = \int B \times dA$.
Si le champ magnétique est homogène et la surface A uniforme, le flux magnétique Φ est calculé avec le produit suivant : $\Phi = B \times A$.
Il montre le document à ses camarades de classe qui sont intrigués par la formule
$\Phi = \int B \times dA$.
Ils décident de s'informer pour comprendre cette formule.

MOTIVATION

La figure ci-contre est composée de deux parties : une en vert et l'autre en rose. Vous connaissez l'aire de la partie en vert qui est celle du rectangle ABCD. Mais vous ne savez pas calculer l’aire de la partie en rose. L'un des objectifs de ce cours est de vous donner une méthode pour calculer l'aire de la partie en rose.	

2. RESUME DE COURS

I. Intégrale d'une fonction continue

1. Notion d'intégrale

a) Propriété et définition

Soit **f** une fonction **continue sur un intervalle K**, a et b deux éléments de K et F une primitive de f sur K.
Le nombre réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de F.
Il est appelé **intégrale de a** à **b de f**

Notation :

On note :

- $\int_a^b f(x)dx$ **et on lit « intégrale (ou somme) de a à b de** $f(x)dx$ **»**

  ou

- $[F(x)]_a^b$ et on lit : " F(x) pris entre a et b".

Donc, on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

b) Vocabulaire

- a et b sont appelés bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$
- La lettre x n'intervient pas dans le résultat de $\int_a^b f(x)dx$.

On peut donc la remplacer par toute autre lettre différente de a et b. On l'appelle **variable muette**.
On a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \cdots = F(b) - F(a)$.

c) Conséquences de la définition

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Exercice :

Calcule les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^1 x^2dx \ ; \qquad P = \int_0^1 z^2dz \quad ; \quad J = \int_3^1 (1 - \frac{1}{t})dt \quad \text{et} \quad H = \int_{-12}^{-12} x\sqrt{3 - x}dx$$

Solution :

• Considérons la fonction f continue sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = x^2$.

Une primitive de f sur $[0; 1]$ est la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Donc $I = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - 0 = \frac{1}{3}$.

• $P = I = \frac{1}{3}$ car la variable z est muette

• Considérons la fonction f continue sur $[1; 3]$ et définie par $f(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)$

Une primitive de f est la fonction F définie par $F(t) = t - \ln t$.

Donc : $J = \int_3^1 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt$

$= [t - \ln t]_3^1$

$= (1 - \ln 1) - (3 - \ln 3)$

$= 1 - 3 + \ln 3$

$J = -2 + \ln 3$

• $H = \int_{-12}^{-12} x\sqrt{3 - x}dx = 0$ car les bornes de l'intégrale H sont identiques.

Exercice de maison:

Calcule les intégrales suivantes:

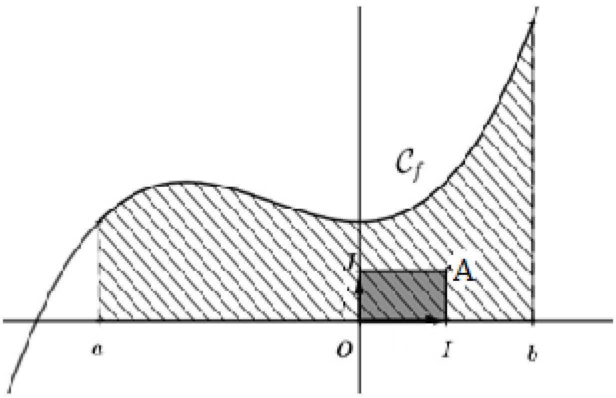
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 2x)e^{(\sin x + x^2)}dx$; $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln z + 2}}{z} dz$ et $\int_{-2}^1 \frac{2t^3 - t}{(t^4 - t^2 + 3)^4} dt$.

d) Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Propriété

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIAJ

1u. a = OI×OJ

On a : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$ u. a

Remarques

• La partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est aussi l'ensemble des points $M(x; y)$du plan tels que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

• Si f une fonction **continue et négative** sur l'intervalle $[a; b]$ tel que $a < b$ alors, l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\mathcal{A} = \int_a^b [-f(x)]dx\,u.a$

Exercice :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie par : f(x) = 2x + 1.

1) Justifie que f est continue et positive sur $[0 ; +\infty[$

2) Calcule en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 5.

Solution

1)

• f étant une fonction polynôme, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ;+\infty[$.

• $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. Donc f est positive sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$, en particulier sur $[0 ; +\infty[$.

2) L'unité d'aire en cm^2 est 2×3 cm^2.

$\mathcal{A}$ = $(\int_0^5 (2x + 1)dx)\times6$ cm^2.

= $6 \times [x^2 + x]_0^5$ cm^2.

= 6 (25 + 5) cm^2.

= 180 cm^2

Exercice à faire

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I , J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie par : f (x) $=x^5$.

Calcule en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -3$ et $x = -1$.

2) Propriétés de l'intégrale

a) Propriétés algébriques

Propriété 1 : Égalité de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle K ; a, b et c trois éléments de K.
On a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Exercice :

Soit la fonction f continue sur ℝ et définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x - 1, \ \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcule $A = \int_0^e f(x)dx$

Solution

$A = \int_0^e f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^e f(x)dx$
$= \int_0^1 (2x - 1)dx + \int_1^e \left(\frac{1}{x}\right) dx$
$= [x^2 - x]_0^1 + [\ln x]_1^e$
$= 1 - 1 - 0 + (1 - 0)$
$= 1$

Exercice de maison:
Calcule $P = \int_{-4}^{6} |x + 3|dx$

Propriété 2 : Linéarité
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K et $\propto$ un nombre réel. On a :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \propto f(x)dx = \propto \int_a^b f(x)dx$.

Exercice :
Calcule $\int_0^{2\pi} (-3\cos x + 2\sin x)dx$.

Solution

$\int_0^{2\pi} (-3\cos x + 2\sin x)dx = \int_0^{2\pi} (-3\cos x)dx + \int_0^{2\pi} (2\sin x)dx$
$= -3 \int_0^{2\pi} \cos x \, dx + 2 \int_0^{2\pi} \sin x \, dx$
$= -3[\sin x]_0^{2\pi} + 2[-\cos x]_0^{2\pi}$
$= -3(0 - 0) + 2(-1 + 1)$
$= 0$

Exercice de maison:
1) Justifie que, pour tout nombre réel t, $\cos^3 t = (1 - \sin^2 t)\cos t$.
2) Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{3}} -4\cos^3 t dt$

b) Propriétés de comparaison

Propriété 1
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Exercice :
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : f(x) = x^2.
Justifie que $\int_{-2}^{7} f(x)dx \geq 0$ sans calculer l'intégrale.

Solution
Pour tout x élément de [-2 ; 7], $x^2 \geq 0$, donc $\int_{-2}^{7} f(x)dx \geq 0$.

Propriété 2
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice :
Démontre que : $\boldsymbol{\int_0^1 (x^2+1)dx \geq \int_0^1 2xdx}$

Solution
Pour tout x , élément de [0 ; 1], $(x-1)^2 \geq 0$, on a : $x^2+1 \geq 2x$
Donc $\int_0^1 (x^2+1)dx \geq \int_0^1 2xdx$

Exercice de maison:
Démontre que : $\int_0^{\pi} x^2 cosx dx \leq \int_0^{\pi} x^2 dx$.

Propriété 3 : Inégalité de la moyenne
f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, m et M sont deux nombres réels.

- Si $m \leq f \leq M$ sur $[a;b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- Si $|f| \leq M, (M \geq 0)$ sur $[a;b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

Exercice :
En supposant que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$, justifie que :
$\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Solution

On sait que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$. D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$1\times(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx \leq \sqrt{2}\times(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

Donc $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Exercice de maison :

Soit a et b deux nombres réels de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $a < b$.

a) Démontre que : $\forall x \in [a;b]$, $\frac{1}{cos^2 a} \leq \frac{1}{cos^2 x} \leq \frac{1}{cos^2 b}$

b) Déduis-en que $\frac{b-a}{cos^2 a} \leq tanb - tana \leq \frac{b-a}{cos^2 b}$

3) Valeur moyenne d'une intégrale

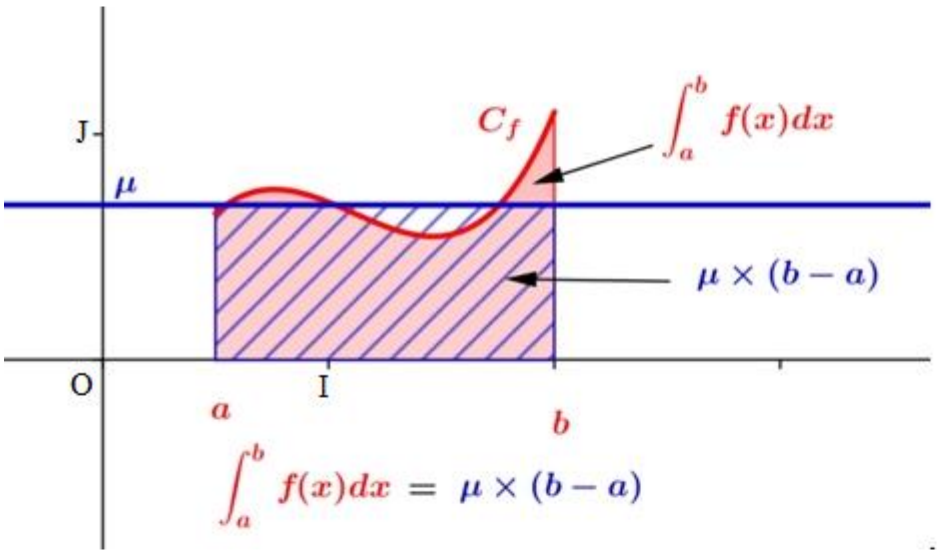
Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$, le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Interprétation graphique :

Posons : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$



La valeur moyenne μ de f sur $[a;b]$ est la hauteur du rectangle de base (b-a) ayant la même aire (en unités d'aire) que la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exercice :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - sinx$.
Calcule la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$.

Solution

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\mu = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}(x - sinx)dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + cosx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}\pi^2 - 2)$

$= \frac{\pi^2-4}{2\pi}$

Exercice de maison:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par*: $f(x) = 3x + cosx$
Calcule *la valeur moyenne de f sur* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

II. Techniques de calcul d'une intégrale
1) Utilisation de primitives

Exercice 1:
Calcule l'intégrale I telle que $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Solution
Considérons la fonction f continue sur [0; 1] et définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
Une primitive de f sur [0; 1] est la fonction F définie par : $F(x) = ln(1 + e^x)$. Donc

$I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= [ln(1 + e^x)]_0^1$

$= ln(1 + e^1) - ln(1 + 1)$

$= ln(1 + e) - ln(2)$.

$= ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

Exercice 2
Calcule l'intégrale J telle que $J = \int_0^1 xe^{x^2}dx$
Indication
Posons : $u(x) = x^2$; $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$

Exercice 3

Calcule l'intégrale K telle que $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^3 tdt$

Indication

$cos^3 t = (cost)(1 - sin^2 t)$

$\quad = cost - costsin^2 t$

Exercice de maison:

Calcule les intégrales suivantes :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cosx}{sinx} dx$ et $\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} cos^5 tsin^5 tdt$

2) Intégration par parties

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$.

Si les dérivées u' et v' sont continues sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exercice :

Calcule $I = \int_1^e x^2 lnx\, dx$

Solution

Posons $u(x) = x^2$ $donc$ $u'(x) = 2x$

$v'(x) = lnx$ et $v(x) = ?$

Posons $u(x) = lnx$ $donc$ $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2$ et prenons $v(x) = \frac{1}{3}x^3$

Ainsi $\int_1^e u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)dx$

$\int_1^e x^2 lnx\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$

$= \frac{2e^3 + 1}{9}$

Exercice de maison :
Calcule les intégrales suivantes **:**
$\int_1^2 x\sqrt{3-x}dx$;$\int_0^1 (x+1)e^x dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$; $\int_2^3 lnxdx$ $et \int_0^2 x^2e^x dx$ (par deux intégrations par parties)

3) Changement de variable affine

Pour calculer $\int_a^b f(\propto x+\beta)dx$, $\propto et\ \beta$ sont des nombres réels tel que $\propto\neq 0$, on peut procéder comme suit :

- Faire le changement de variable : $t=\propto x+\beta$
  On a : $dt=\propto dx$. D'où $dx=\frac{1}{\propto}dt$
  $x=a \Leftrightarrow t=\propto a+\beta$
  $x=b \Leftrightarrow t=\propto b+\beta$.
- Utiliser l'égalité: $\int_a^b f(\propto x+\beta)dx=\int_{\propto a+\beta}^{\propto b+\beta}\frac{f(t)}{\propto}dt$.

Exercice :
Calcule $P=\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$

Solution :
Posons $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $f(2x+3)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$
Posons t = $2x+3$ on déduit :

- $dt=2dx$ donc $dx=\frac{1}{2}dt$
- $x=\ -1 \Leftrightarrow\ t$ = 1 et
  $x=0\ \Leftrightarrow\ t$ = 3

Par conséquent,

$$P=\int_{-1}^{0} f(2x+3)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx\ =\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\times\frac{1}{2}dt$$

$$=\int_{1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$=\left[\sqrt{t}\right]_1^3$$

$$P=\sqrt{3}-1$$

Exercice de maison
Calcule les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable affine
$\int_{-\frac{5}{2}}^{-2}(2x+5)^7dx$, $\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$ et $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$

4) Intégration des fonctions paires, impaires, périodiques

Propriété1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.
Pour tout élément a de K, on a :

- Si f est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Exercice :

Calcule $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$ et $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx$

Solution :

- La fonction $x \mapsto cos2x$ est paire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2cos2xdx = [sin2x]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

- La fonction $x \mapsto sin2x$ est impaire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx = 0$$

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.
Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$
- $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

Exercice :

Calcule $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx$

Solution :

La fonction $x \mapsto cos2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période π, donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} cos2xdx = \int_{0}^{\pi} cos2xdx = 0$$

Exercice de maison:

Calcule: $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^6 sinxdx$; $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^6 cosxdx$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} cosxdx$

III. Calcul d'aires

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

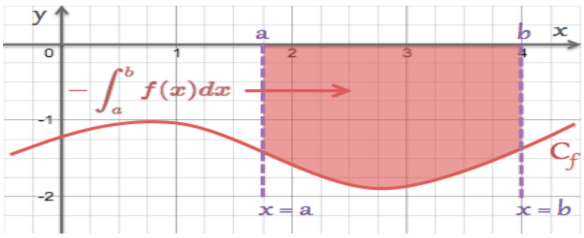
1) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, (C_f) sa courbe représentative.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

a) Si f est positive sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \,.\, ua$

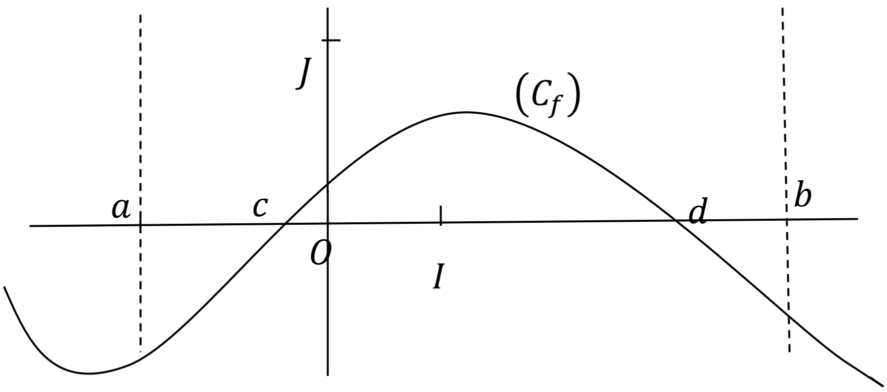
b) Si f est négative sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx \,.\, ua$

Par exemple, sur la figure ci-dessous, f est une fonction **continue et négative** sur l'intervalle $[a; b]$, on a : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx \; ua$



c) Si f ne garde pas un signe constant sur $[a; b]$, alors on subdivise $[a; b]$ en des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Par exemple, sur la figure ci-dessous, on subdivise $[a; b]$ en $[a; c]$, $[c; d]$ et $[d; b]$.
f est positive sur $[c; d]$ et f est négative sur $[a; c]$ et sur $[d; b]$

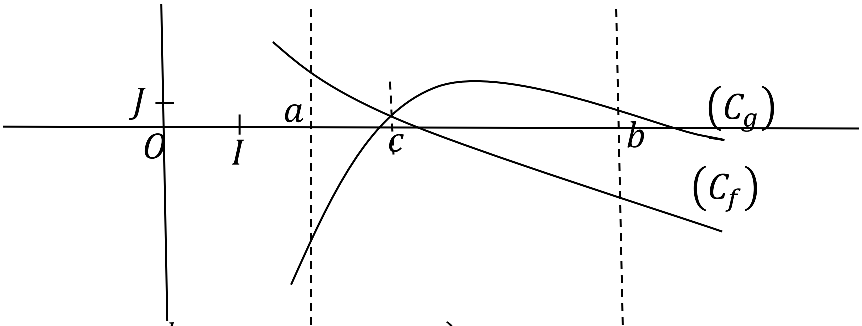


On a : $\mathcal{A} = \left(-\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx\right) ua$

2) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.
$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.
a) Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = \left(\int_a^b [g(x) - f(x)]dx\right) ua$.

b) Si $f - g$ ne garde pas un signe constant sur $[a; b]$, alors on procède comme au 1)c.

Par exemple, sur la figure ci-contre :



On a : $\mathcal{A} = \left(\int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx\right) ua$

Exercice 1
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I , J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
On considère la fonction f définie par : f (x) =$-x^2$.
Calcule en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 1 et x = 3.

Solution
f est continue et négative sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ = $-\int_1^3 (-x^2)dx$ en $(u.a)$
L'unité d'aire en cm^2 est 2×4 cm^2, donc $\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 -(-x^2)dx$)×8 cm^2
$\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 x^2 dx$)×8 cm^2
= 8 × $[\frac{1}{3}x^3]_1^3$ cm^2
= 8 (9$-\frac{1}{3}$) cm^2
$\mathcal{A}$ = $\frac{208}{3}$ cm^2

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $\mathrm{f}(x) = x^3$. On désigne par (C_f), la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2cm$.

Calcule en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par(C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = -1 \ \ et \ \ x = 1$.

Solution :

f étant continue, négative sur $[-1; 0]$ et positive sur $[0; 1]$

$\mathcal{A} = (-\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx)\ ua$

$=\left(-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}\right) \times 2 \times 2cm^2$

$= (- (0 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - 0)) \times 4\ cm^2$

$\mathcal{A} = 2\ cm^2$

Exercice de maison

Soit les fonctions f et g définies par : $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \mathbf{2} \ \ \boldsymbol{et} \ \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$

On désigne par(C_f), (C_g)les courbes représentatives de $f\ et\ g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé(O, I, J) . Unité graphique: $2cm$

Calcule encm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plandélimitée par (C_f), $(C_g)\ \ et$ les droites d'équations : $x = -1 \ \ et \ \ x = 2$

IV. Fonction du type $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{x} \mapsto \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{dt}$

Propriété :

Soit $f$une fonction continue sur un intervalle K et a un élément de K.

La fonction de K vers $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{dt}$, est la primitive de f qui s'annule en a.

Conséquence :

Si F est une fonction définie sur un intervalle K par : $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$, alors:

$\forall\ x \epsilon \mathrm{K}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$

Exercice :

Justifie que la fonction logarithme népérien est la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt$

Solution :

La fonction ln, est l'unique primitive sur]0, + ∞ [de la fonction , $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1. On en déduit que $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Exercice de maison:

Un corps est lâché, avec une vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$, d'une hauteur de 2000m et il est soumis à l'accélération de la pesanteur g = 9,8m.s^{-2}

1) Justifie que la fonction D définie par : D(x)=$\int_0^x g \times t dt$ est la distance parcourue après $x$secondes de chute.

2) Calcule l'instant T(en seconde) mis pour qu'il soit au sol.

3. EXERCICES

3-1. Exercices de renforcement

Calcule les intégrales suivantes **:**

$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$; $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(lnx)^2}dx$; $\int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5}dx$; $\int_{-5}^{12} 2|2x+3|dx$; $\int_2^5 \frac{x+\frac{5}{2}}{x^2+5x-6}dx$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} cos^5tsin^5tdt$; $\int_{-4}^{-2} \frac{t^2+3t-2}{t+1}dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^6xdx$

3-2. Exercices d'approfondissement

Exercice 1 :

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1 - e^x$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique$2cm$.
1) Calcule les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.
Interprète graphiquement les résultats obtenus.
2) a) Calculer la limite en $-\infty$ de$f(x)$.
b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).
3) Dresse le tableau de variation de$f$.
4) Trace (D) et(C).
5) Calcule encm^2, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$de la partieΔ du plan limitée par (C), la droite (D),les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

Exercice 2 :

Soit F la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.
On désigne par (C_F) la représentation graphique de F dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que : $OI = 2cm$ et $OJ = 1cm$.
1) Détermine l'ensemble de définition de F.
2) Etudie le sens de variation de F.
3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = F(x) - \ln x$.
a) Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}dt$
b) Justifie que : $\forall t \in]0; +\infty[$, $\frac{e^t-1}{t} > 0$. Déduis-en que : $\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$.
c) En utilisant les propriétés de comparaison, détermine les limites de F en 0 et en$+\infty$.
4) Dresse le tableau de variation de F.
5) Justifie que (C_F) admet une asymptote verticale.

6) Soit $x \in]1; +\infty[$.

a) Démontre que : $\forall t \in [1; x]$, $\frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}$ et que $F(x) \geq \frac{1}{x}\int_1^x e^t dt$

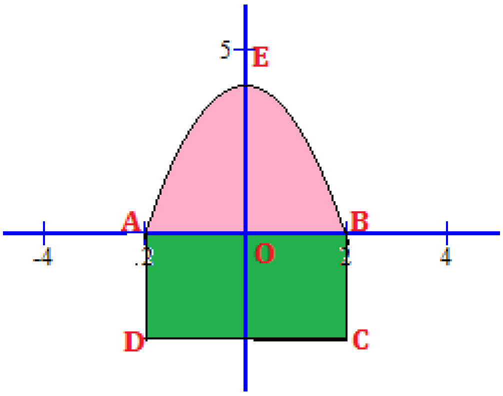
b) Déduis-en que :$\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^x - e}{x^2}$

C)Démontre que (C_F) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

7) Trace (C_F).

4. SITUATION D'EVALUATION

Exercice 9



Un de vos camarades de classe rend visite à l'ancien professeur de mathématiques de son père à la retraite. Il remarque les formes géométriques particulières de la terrasse de celui-ci (voir figure) : la partie en vert est délimitée par un rectangle de largeur 2 m et de longueur 4m et la partie en rose est délimitée par une parabole et par un segment [AB]. Amusé par le regard de votre camarade, l'ancien professeur de mathématique le met au défi et lui demande de calculer l'aire totale de la terrasse en vue de lui donner une idée du coût des travaux de revêtement de cette terrasse.

Il lui présente le plan de la terrasse en précisant que pendant la construction, il a veillé à ce que la parabole qui apparait dans le plan ait pour équation $y = -x^2+4$dans le repère orthonormé d'origine O et d'unité 1m, avec A (-2,0) et B(2,0).

Aide ce camarade a relevé ce défi.